

# תהליכים אקראיים בפיזיקה

פרק 44 - המשתנה המקרי הדו ממדי הרציף

תוכן העניינים

1. משתנה דו ממדי רציף ..... 1

## משתנה מקרי דו ממדי רציף:

### רקע:

יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים רציפים המוגדרים בתחום  $R$  מסוים. פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם תסומן על ידי  $f(x, y)$ . פונקציית צפיפות משותפת צריכה לקיים את שני התנאים הבאים:

$$(1) \quad f(x, y) \geq 0 \quad \text{לכל } (x, y) \in R$$

$$(2) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = 1$$



### דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} : \text{נתונה הפונקציה}$$

הראו שפונקציה זו יכולה להיות פונקציית צפיפות משותפת.

### פונקציית צפיפות שולית:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy : \text{פונקציית הצפיפות השולית של } X \text{ תתקבל באופן הבא}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx : \text{פונקציית הצפיפות השולית של } Y \text{ תתקבל באופן הבא}$$

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} : \text{מצאו לפונקציית הצפיפות}$$

את פונקציית הצפיפות השולית של  $X$ , וחשבו את  $E(X)$  דרכה.

### אי-תלות בין משתנים רציפים:

$X$  ו- $Y$  יהיו משתנים מקרים בלתי תלויים, אם עבור כל  $X$  ו- $Y$  בתחום ההגדרה  $R$  מתקיים ש:  $f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$ .

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

האם  $X$  ו- $Y$ , המתפלגים לפי פונקציית הצפיפות המשותפת:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

הם משתנים בלתי תלויים?

**חישוב הסתברויות עבור משתנה מקרי רציף דו ממדי:**

הנפח הכלוא מתחת למשטח  $f(x, y)$  בתחום מסוים ייתן את ההסתברות ש- $X$

$$\text{ו-} Y \text{ יהיו בתחום הזה: } P[(x, y) \in A] = \iint_A f(x, y) dx dy$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

$$P(X < 0.5 \cap Y < 0.5) \quad \text{חשבו את הסיכוי:}$$

**פונקציית התפלגות מצטברת משותפת:**

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת הינה פונקציה של שני משתנים רציפים המחזירה את הסיכוי שהמשתנים יהיו קטנים מערכים מסוימים:

$$F(s, t) = P(X \leq s \cap Y \leq t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s f(x, y) dx dy$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת

$$\text{ועל פיה חשבו את הסיכוי: } P(X < 0.5 \cap Y < 0.5)$$

**פונקציית צפיפות מותנית:**

אם ל- $X$  ול- $Y$  ישנה פונקציית צפיפות משותפת  $f(x, y)$ , אז מגדירים את פונקציית הצפיפות המותנית של  $X$ , בהינתן ש- $Y = y$  לכל ערכי  $y$

$$\text{המקיימים: } f(y) > 0 \text{ על ידי: } f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}$$

באופן דומה, פונקציית הצפיפות המותנית של  $Y$  בהינתן ש- $X = x$  לכל ערכי  $x$

$$\text{המקיימים: } f(x) > 0 \text{ על ידי: } f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

$$\text{מצאו את: } f(x|y)$$

**תוחלת מותנית:**

ל- $X$  ול- $Y$  ישנה פונקציית צפיפות משותפת  $f(x, y)$ .

$$\text{התוחלת של } X \text{ בהינתן ש-} Y = y \text{ תהיה: } E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y) dx$$

ובאופן דומה, התוחלת של  $Y$  בהינתן ש- $X = x$  תהיה:

$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x) dy$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

$$\text{מצאו את: } E(X|Y)$$

## שאלות:

- (1) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:  $f(x, y) = x + y$ , המוגדרת בתחום שבו:  $0 \leq x \leq 1$  וגם:  $0 \leq y \leq 1$ . הוכיחו שמדובר בפונקציית צפיפות.
- (2) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:  $f(x, y) = Ax(x - y)$ , המוגדרת בתחום שבו:  $0 \leq x \leq 2$  וגם:  $-x \leq y \leq x$ . מצאו את ערכו של הפרמטר  $A$ .
- (3) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:  $f(x, y) = \frac{(x \cdot y)^3 + x \cdot y}{C}$ , המוגדרת בתחום שבו:  $0 \leq x \leq 1$  וגם:  $0 \leq y \leq 1$ .  
 א. מצאו את ערכו של  $C$ .  
 ב. מצאו את  $f(y)$ .  
 ג. האם  $X$  ו- $Y$  הינם משתנים בלתי תלויים?
- (4) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:  $f(x, y) = \frac{1}{800}$ , המוגדרת בתחום שבו:  $60 \leq x \leq y$  וגם:  $60 \leq y \leq 100$ .  
 א. הראו שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקציית צפיפות.  
 ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של  $Y$ .  
 ג. חשבו את  $E(X)$ ,  $V(X)$ .  
 ד. האם  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי תלויים?  
 ה. חשבו את מקדם המתאם בין  $X$  ל- $Y$ .  
 ו. חשבו את הסיכוי:  $P(Y > X + 10)$ .
- (5) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:  
 $f(x, y) = \lambda\mu \cdot e^{-(\lambda x + \mu y)}$ , המוגדרת בתחום שבו:  $x, y > 0$ .  
 א. מצאו את פונקציית הצפיפות של  $X$  ואת פונקציית הצפיפות של  $Y$ .  
 ב. האם  $X$  ו- $Y$  הם משתנים תלויים?  
 ג. מהו מקדם המתאם בין  $X$  ל- $Y$ ?  
 ד. חשבו את הסיכוי:  $P(Y > X)$ .

(6)  $Y$  הינו משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בקטע:  $[2, 4]$ .

בנוסף, נתון ש- $X$  הינו משתנה מקרי רציף המקיים:  $0 \leq x \leq y$ ,  $f(x|y) = \frac{2x}{y^2}$ .  
מצאו את השונות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

(7) נתונים שני משתנים מקרים רציפים  $X$  ו- $Y$ . פונקציות הצפיפות

$$f(x, y) = \begin{cases} x & 0 < y < 1 \\ 0 & 1 - y \leq x \leq 1 + y \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

המשותפות שלהם היא:

- מצאו את  $f(x)$ .
- מצאו את  $f(y|x)$ .
- מצאו את  $E(Y|X)$ .

(8) יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים רציפים המתפלגים אחיד בתוך משולש שקדקודיו:  $(-1, 2)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ .

- רשמו את פונקציית הצפיפות המשותפת.
- מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של  $X$  ו- $Y$ .
- חשבו את התוחלת של  $X$  ו- $Y$ .
- האם  $X$  ו- $Y$  משתנים בלתי מתואמים?
- האם  $X$  ו- $Y$  משתנים בלתי תלויים?

(9) פונקציית צפיפות משותפת מקבלת ערך אחיד באופן הבא:

הצפיפות על פני משולש  $A$  הינה 1.5 והצפיפות על פני משולש  $B$  היא 0.5.  
האם פונקציית הצפיפות המשותפת היא לגיטימית?



- מצאו את  $f(x)$ .
- מצאו את  $f(x|y)$ .

(10) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת:  $f(x, y) = cx$ . פונקציה זו מוגדרת

בתחום שבו:  $0 \leq x \leq 1$  וכן:  $0 \leq y \leq x^2$ .

- מצאו את הקבוע  $C$ .
- חשבו את ההסתברות ש- $6Y < 1 - X$ .

**11** נתונים  $X$  ו- $Y$  שני משתנים מקריים רציפים כך ש:  $Y \sim U(0,1)$

ו- $X|Y=y \sim U(0, \sqrt{y})$ . חשבו את:  $E(Y|X=0.5)$ .

**12** נתונה פונקציית הצפיפות:  $f(x,y) = 2e^{-x} \cdot e^{-2y}$  בתחום שבו:  $x, y \geq 0$ .

חשבו את הסיכוי:  $P(X < Y)$ .

**13** נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת:  $f(x,y) = \frac{e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y}$ , המוגדרת לרביע הראשון. חשבו את:  $P(X > 1|Y=2)$ .

**14** יוסי וערן עובדים באותו המשרד. הם מגיעים לעבודה בכל יום בין 8:00 ל-9:00. נניח שזמן ההגעה של כל אחד מתפלג אחיד ובאופן בלתי תלוי זה בזה. מה הסיכוי שיוסי יצטרך לחכות לערן יותר מ-10 דקות?

**15** נתונים שני משתנים מקרים רציפים:  $X \sim N(Y,1)$  ו- $Y \sim U(0,2)$ .

א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .

ב. מצאו את  $E(X^2|Y)$ .

ג. מצאו את  $E(X)$ .

**16** פונקציית הצפיפות המשותפת של  $X$  ו- $Y$  היא:  $f(x,y) = 1$ .

פונקציה זו מוגדרת בתחומי:  $0 \leq x, y \leq 1$ .

הוכיחו ש:  $E(|X-Y|^n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$ .

**17**  $X \sim \exp(1)$  וכן:  $Y \sim \exp(1)$ , הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.

נגדיר את:  $Z = \frac{X}{X+Y}$ .

הוכיחו:  $Z \sim U(0,1)$ .

## תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2)  $A = \frac{1}{8}$

(3) א.  $\frac{5}{16}$  ב.  $f(y) = 0.8y^3 + 1.6y$  ג. תלויים.

(4) א. שאלת הוכחה. ב.  $f(y) = \frac{y-60}{800}$  ג.  $E(X) = 73\frac{1}{3}$ ,  $V(X) = 88\frac{8}{9}$

ד. לא. ה. 0.5 ו. 0.5625

(5) א.  $f(y) = \mu e^{-\mu y}$ ,  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  ב. לא.

ג. 0. ד.  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

(6)  $\frac{2}{9}$

(7) א.  $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2x - x^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$$E(y|x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \leq x < 1 \quad 1-x < y < 1 \\ \frac{1}{2-x} & 1 \leq x \leq 2 \quad x-1 < y < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

(8) א.  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & 1+x < y < 1-x-1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$$f(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y < 1 \\ 2-y & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

ג.  $E(X) = -\frac{2}{3}$ ,  $E(Y) = 1$  ד. כן.

ה. לא.

9) א. כן. ב.  $f(x) = \begin{cases} 1.5 - x & 1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ג.  $f(x|y) = \begin{cases} \frac{1.5}{1.5-y} & 0 \leq x < 1-y \\ \frac{0.5}{1.5-y} & 1-y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

10) א. 4. ב. 0.0947

11)  $\frac{7}{12}$

12)  $\frac{1}{3}$

13)  $e^{-\frac{1}{2}}$

14)  $\frac{25}{72}$

15) א.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$  ב.  $y^2 + 1$

ג. 1

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.